

Функции и интуиция за граници

Подготовка за диференциално смятане и АІ

0. Цел на лекцията

Днес:

- изграждаме интуиция за функции и графики
- учим наклон, растене/спадане, четност/нечетност
- извеждаме идеята за граница чрез площ под $y = x^2$ на $[0, 1]$

1. Какво е функция

Функция е правило, което на всеки допустим вход x съпоставя точно една стойност $f(x)$.

Един и същ вход $\Rightarrow$ един и същ изход. Ако при един и същ вход понякога получаваме различни резултати — това **не** е функция.

Записът $f(x)$ означава:

„Резултатът, който функцията дава при вход x .“

Област на дефиниция

Не всички x са позволени. Например:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad x \geq 0$$

(ако работим в реалните числа).

2. Графика на функция

Графиката на функцията е начин да видим всички входове и изходи наведнъж.

- хоризонтална ос (абсциса) — вход x
- вертикална ос (ордината) — изход $f(x)$

Всяка точка $(x, f(x))$ означава:

„При този вход получаваме този изход.“

Вертикален тест

Ако една вертикална права пресича „графиката“ повече от веднъж, това не е графика на функция (защото един вход би имал два изхода).

3. Линејни функции и наклон

Линейна функция:

$$f(x) = ax + b$$

- $b = f(0)$ — пресечната точка с оста y
- a — НАКЛОН

Интуиция за наклона

Наклонът отговаря на въпроса:

Колко се променя $f(x)$, когато x се увеличи с 1?

Пример: $f(x) = 2x + 1$.

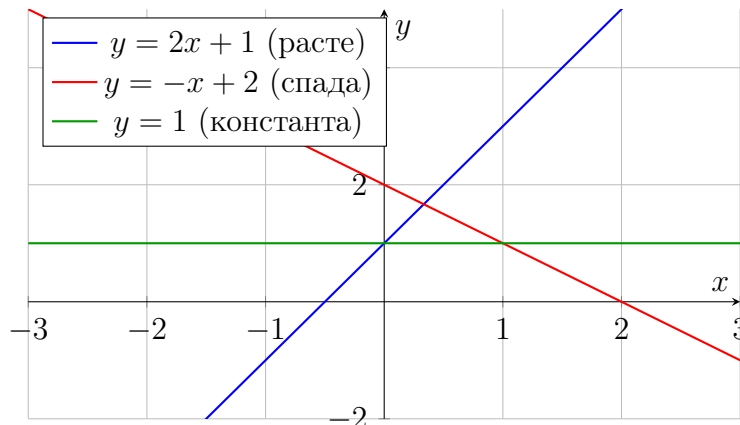
$$f(1) = 3, \quad f(2) = 5$$

Когато x нараства с 1, стойността на функцията нараства с 2. Значи наклонът е 2.

Расте/спада

- ако $a > 0$ — функцията расте (графиката се „качва“ надясно)
- ако $a < 0$ — функцията спада (графиката „слиза“ надясно)
- ако $a = 0$ — функцията е константна

Графика (линейни примери)



Микро-задачи

1. Какъв е наклонът на $y = 5x - 7$? Расте ли или спада?
2. Намери b (пресечната точка с y -оста) за $y = -3x + 4$.
3. Ако графиката е права линия, която минава през $(0, 2)$ и $(1, 5)$, намерете линейната функция.

Отговори

- $y = 5x - 7$: наклон $a = 5$, **расте**.
- $y = -3x + 4$: $b = 4$.
- През $(0, 2)$ и $(1, 5)$: наклон $a = \frac{5 - 2}{1 - 0} = 3$, $b = 2$, $y = 3x + 2$.

4. Квадратна функция и „форма“

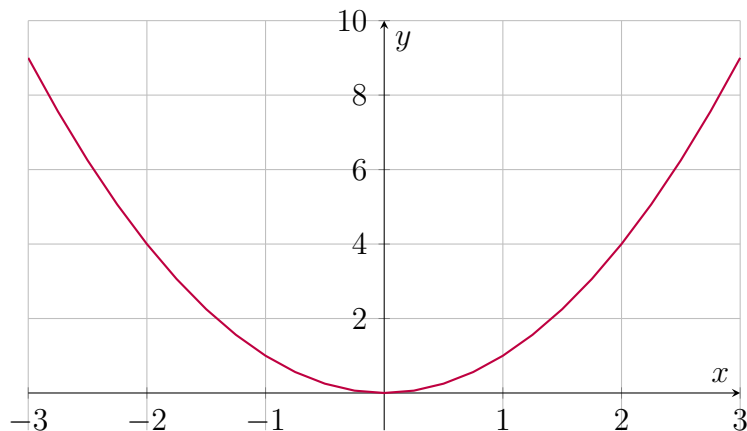
Квадратна функция:

$$f(x) = x^2$$

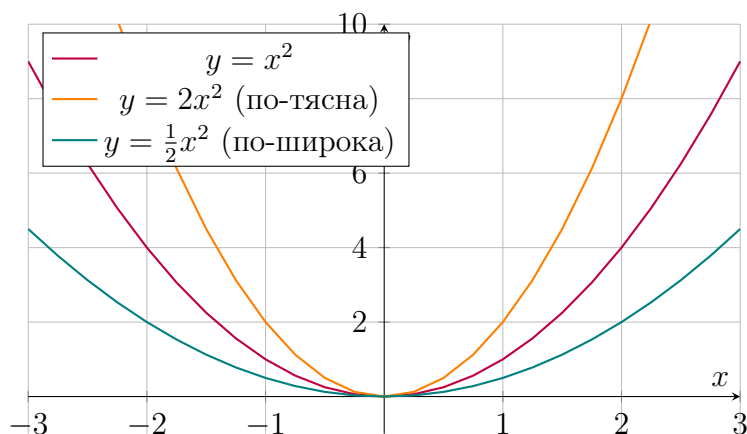
Интуиция:

- винаги е ≥ 0
- около 0 расте бавно, далеч от 0 расте бързо

Графика



Още една графика: параболи с различна „ширина“



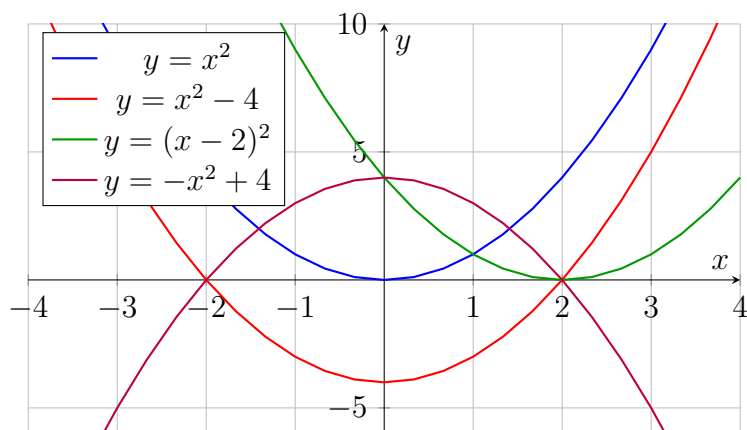
Микро-задачи

1. Без да смяташ: коя е по-голяма за $x \in (0, 1)$ — x или x^2 ?
2. Къде е $x^2 - 4$ над оста x и къде е под нея?
3. Как ще се промени графиката, ако добавим +3: $y = x^2 + 3$?

Отговори

- За $x \in (0, 1)$: $x > x^2$.
- $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 2$: над оста за $x \leq -2$ или $x \geq 2$, под оста за $-2 < x < 2$.
- $y = x^2 + 3$: цялата парабола се вдига нагоре с 3.

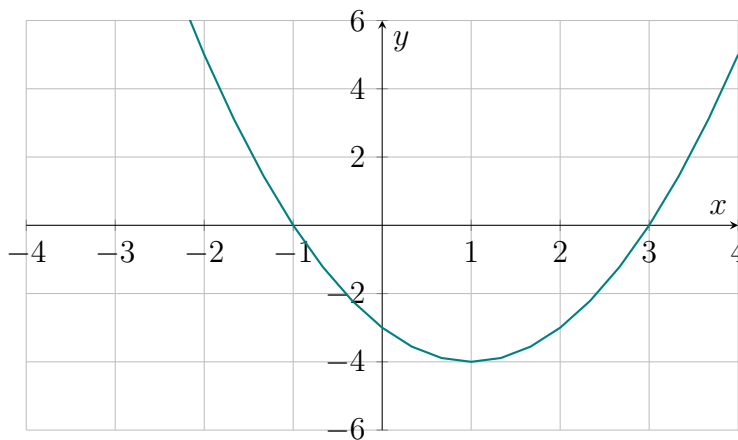
Още примери за квадратни функции



Произволна квадратна функция

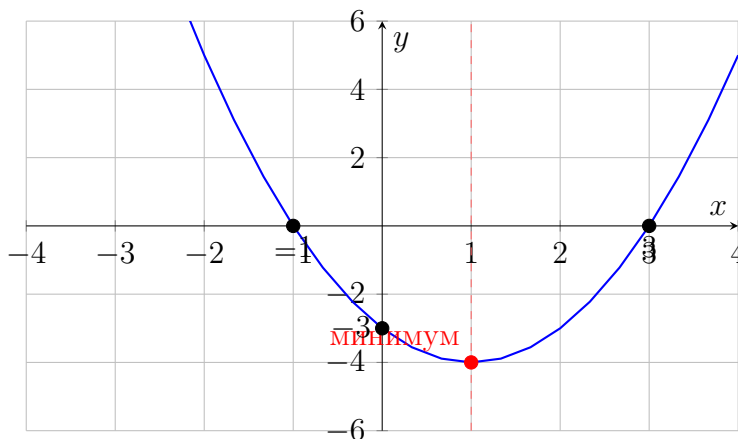
Разглеждаме функцията:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$



Минимум и пресечни точки

За функцията $f(x) = x^2 - 2x - 3$:



Кога имаме максимум?

Ако коефициентът пред x^2 е отрицателен (напр. $g(x) = -x^2 + 4x + 1$), параболата е отворена надолу и върхът е **максимум**.

5. Четни и нечетни функции (симетрии)

Четна функция

$$f(-x) = f(x)$$

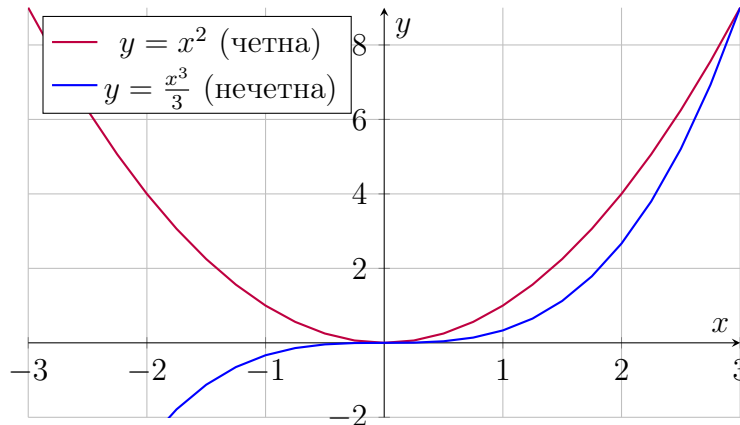
Графика: симетрия спрямо оста y . Примери: x^2 , $\cos x$, $|x|$.

Нечетна функция

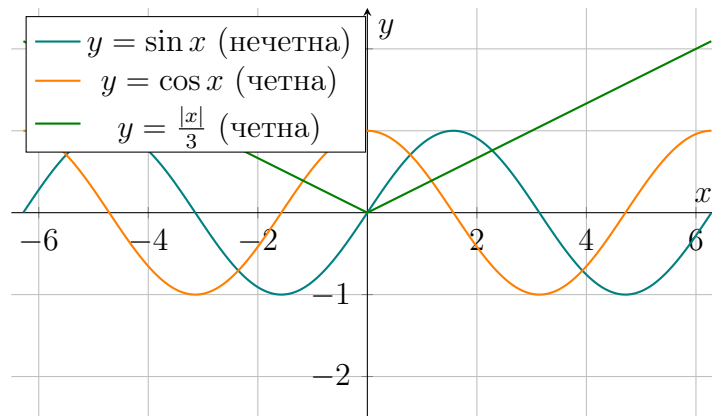
$$f(-x) = -f(x)$$

Графика: симетрия спрямо началото. Примери: x , x^3 , $\sin x$.

Графики: четна и нечетна



Допълнителни графики ($|x|$, $\sin$, $\cos$)



Задачи (четност/нечетност)

1. Определи дали е четна/нечетна/нито: $x^2 + 1$, $x^3 - x$, $|x|$, $\sin x + \cos x$.
2. Ако f е четна, какво можеш да кажеш за $f(5)$ и $f(-5)$?
3. Ако g е нечетна, какво е $g(0)$?

Отговори

- $x^2 + 1$: четна. $x^3 - x$: нечетна. $|x|$: четна. $\sin x + \cos x$: нито.
- $f(5) = f(-5)$.

- $g(0) = 0$.

6. Финитистка и инфинитистка математика

Финитистки поглед

- работим само с крайни приближения
- безкрайността е „език“ за „много голямо“

Инфинитистки поглед

- безкрайността е легитимна идея
- границите могат да имат точни стойности

7. Раждането на границата чрез площ под x^2

Искаме площта под графиката:

$$y = x^2 \quad \text{за } x \in [0, 1].$$

Проблем

Кривата е „гладка“, но не е правоъгълник или триъгълник. Ние обаче умеем да намираме площ на правоъгълници. Затова ще направим умишлено неточно приближение.

Стъпка 1: Разделяме интервала

Разделяме $[0, 1]$ на N равни части. Широчината на всяка е:

$$\Delta x = \frac{1}{N}.$$

Стъпка 2: Правоъгълници

Ще построим правоъгълници при $x = \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}$.

- широчина: $\frac{1}{N}$
- височина: $\left(\frac{1}{N}\right)^2, \left(\frac{2}{N}\right)^2, \dots, \left(\frac{N-1}{N}\right)^2$

Лицата на правоъгълниците са:

$$\frac{1}{N} \left(\frac{1}{N}\right)^2, \quad \frac{1}{N} \left(\frac{2}{N}\right)^2, \quad \dots, \quad \frac{1}{N} \left(\frac{N-1}{N}\right)^2.$$

Стъпка 3: Приблизена площ

Нека $S_{\text{пр.}}$ е приближената площ (правоъгълници). Тогава:

$$S_{\text{пр.}} = \frac{1}{N} \left(\frac{1}{N} \right)^2 + \frac{1}{N} \left(\frac{2}{N} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{N} \left(\frac{N-1}{N} \right)^2.$$

Сега изнасяме $\frac{1}{N^3}$:

$$S_{\text{пр.}} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (N-1)^2}{N^3}.$$

Това е **грешно** за крайно N , но:

Колкото по-голямо е N , толкова по-тесни са правоъгълниците и толкова по-малка е грешката.

Стъпка 4: Идеята за граница

Истинската площ е стойността, към която се доближава $S_{\text{пр.}}$, когато $N \rightarrow \infty$. Ще използваме формулата за сбор на квадрати (която доказваме в края на материала):

$$1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Тук $m = N - 1$. Следователно:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (N-1)^2 = \frac{(N-1)N(2N-1)}{6}.$$

Замествайки в $S_{\text{пр.}}$:

$$S_{\text{пр.}} = \frac{\frac{(N-1)N(2N-1)}{6}}{N^3} = \frac{(N-1)(2N-1)}{6N^2}.$$

Разкриваме числителя:

$$(N-1)(2N-1) = 2N^2 - 3N + 1.$$

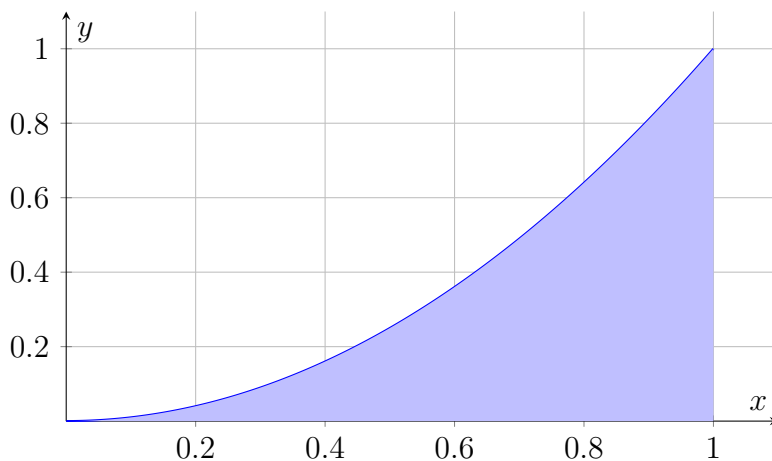
Тогава:

$$S_{\text{пр.}} = \frac{2N^2 - 3N + 1}{6N^2} = \frac{2}{6} - \frac{3}{6N} + \frac{1}{6N^2}.$$

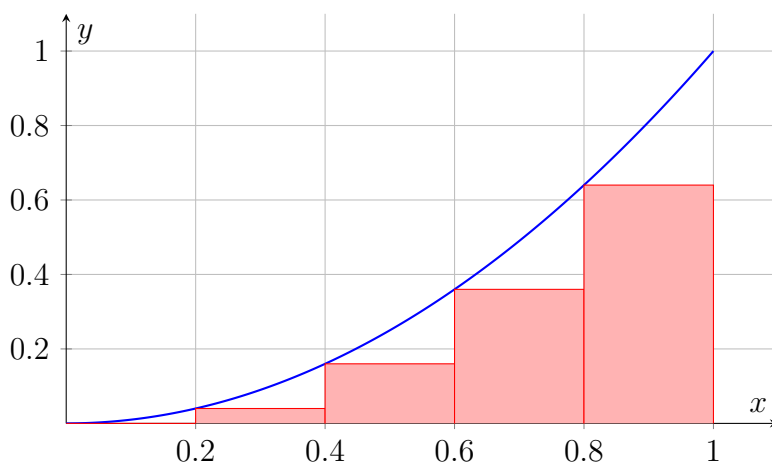
Когато $N \rightarrow \infty$, последните два члена отиват към 0 и остава:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{\text{пр.}} = \frac{1}{3}.$$

8. Цветна графика със заштрихована площ



9. Правоъгълници



Задачи

1. Ако вземаме височината в левия край, приближението ще е по-голямо или по-малко? (За x^2 на $[0, 1]$.)
2. Какво ще стане с грешката, ако N стане 10, 100, 1000?
3. Можем ли някога с крайно N да получим „перфектната“ площ за крива? Какво мислиш?

Отговори

- За x^2 на $[0, 1]$ (растяща функция): ляв край дава **по-малко** приближение, десен край дава **по-голямо**.

- Грешката намалява, защото правоъгълниците стават по-тесни.
- С крайно N — почти никога „перфектно“ за крива; идеята на границата е да опишем какво става при безкрайно финно делене.

10. Граници: задачи 1–17

Полезни техники

- При $x \rightarrow \infty$: сравняваме най-високите степени или делим на най-високата степен.
- Факторизация: $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$.
- Рационализация: умножаваме по „спрегнатото“ (същото, но със сменен знак).
- За корени от степен 3: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{x + 4}$

Решение: Когато x е много голямо, най-важни са членовете с най-висока степен. В числителя имаме x^2 , а в знаменателя имаме x . Това подсказва, че дробта расте приблизително като x .

Най-сигурният начин: делим числителя на знаменателя (или преобразуваме):

$$\frac{x^2 - 3x + 4}{x + 4} = \frac{(x + 4)(x - 7) + 32}{x + 4}$$

защото:

$$(x + 4)(x - 7) = x^2 - 7x + 4x - 28 = x^2 - 3x - 28.$$

За да стане $x^2 - 3x + 4$, добавяме 32.

Тогава:

$$\frac{x^2 - 3x + 4}{x + 4} = x - 7 + \frac{32}{x + 4}.$$

Сега гледаме границата:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - 7 + \frac{32}{x + 4} \right).$$

Членът $\frac{32}{x+4} \rightarrow 0$, но $x - 7 \rightarrow +\infty$. Следователно:

$$\boxed{+\infty}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{3x + 1} - \frac{2x^2 + 3}{3x^2 - 1} \right)$$

Решение: Това е разлика на две дроби, и за $x \rightarrow \infty$ можем да намерим границата на всяка отделно.

Първа дроб:

$$\frac{2x - 1}{3x + 1}.$$

Делим числител и знаменател на x :

$$\frac{2 - \frac{1}{x}}{3 + \frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}.$$

Втора дроб:

$$\frac{2x^2 + 3}{3x^2 - 1}.$$

Делим числител и знаменател на x^2 :

$$\frac{2 + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 0}{3 - 0} = \frac{2}{3}.$$

Значи цялата граница е:

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

$$\boxed{0}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Решение: Факторизираме разлика на квадрати:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Тогава за $x \neq 2$:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2.$$

Сега:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2) = +\infty.$$

$$\boxed{+\infty}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2}{x^5 + x^3 + 2x^2}$$

Решение: Най-високата степен в знаменателя е x^5 . Делим всичко на x^5 :

$$\frac{\frac{x^4}{x^5} + \frac{3x^2}{x^5}}{\frac{x^5}{x^5} + \frac{x^3}{x^5} + \frac{2x^2}{x^5}} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}.$$

При $x \rightarrow \infty$ всички $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3} \rightarrow 0$. Значи:

$$\frac{0 + 0}{1 + 0 + 0} = 0$$

$$\boxed{0}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x - 2}$$

Решение: Най-високата степен е x^2 . Делим на x^2 :

$$\frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0 - 0} = 1.$$

$$\boxed{1}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{5x - 1} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x - 1} \right)$$

Решение: Имаме произведение на две дроби. Намираме границите им поотделно.

Първа дроб:

$$\frac{3x}{5x - 1}.$$

Делим на x :

$$\frac{3}{5 - \frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{3}{5}.$$

Втора дроб:

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x - 1}.$$

Делим на x^2 :

$$\frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 0}{1 + 0 - 0} = 1.$$

Произведението:

$$\frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{3}{5}.$$

$$\boxed{\frac{3}{5}}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + b}{cx^3 + d} \quad (c \neq 0)$$

Решение: Най-високата степен е x^3 . Делим числител и знаменател на x^3 :

$$\frac{a + \frac{b}{x^3}}{c + \frac{d}{x^3}}.$$

При $x \rightarrow \infty$: $\frac{b}{x^3} \rightarrow 0$ и $\frac{d}{x^3} \rightarrow 0$. Получаваме:

$$\frac{a}{c}.$$

$$\boxed{\frac{a}{c}}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 - x}{x^2 + 2x + 3}$$

Решение: Степента на числителя е 1, на знаменателя е 2. Дробта се държи като $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \rightarrow 0$. Да го направим формално: делим на x^2 :

$$\frac{\frac{-x}{x^2} + \frac{-3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{-\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{0 - 0}{1 + 0 + 0} = 0.$$

$$\boxed{0}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 3)(x + 5)}{x^2 + 1}$$

Решение: Разкриваме числителя:

$$(x + 3)(x + 5) = x^2 + 8x + 15.$$

Тогава:

$$\frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 + 1}.$$

Делим на x^2 :

$$\frac{1 + \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 0 + 0}{1 + 0} = 1.$$

$$\boxed{1}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

Решение: Тук директното заместване дава 0/0. Трикът е рационализация.

Умножаваме числителя и знаменателя по спрегнатото $\sqrt{1+x} + 1$:

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{(1+x) - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{x}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1}.$$

Сега вече можем да заместим $x = 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\frac{1}{2}}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{4x}$$

Решение: Пак имаме 0/0. Рационализираме числителя чрез умножение по спрегнатото:

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{4x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{(1+x) - (1-x)}{4x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}.$$

Числителят:

$$(1+x) - (1-x) = 2x.$$

Тогава:

$$\frac{2x}{4x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{1}{2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}.$$

Сега заместваме $x = 0$:

$$\frac{1}{2(1+1)} = \frac{1}{4}.$$

$$\boxed{\frac{1}{4}}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x}$$

Решение: Директно е 0/0. Тук рационализацията е чрез формулата за разлика на кубове.

Нека:

$$a = \sqrt[3]{1+x^2}, \quad b = 1.$$

Тогава:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Но:

$$a^3 - b^3 = (1 + x^2) - 1 = x^2.$$

Следователно:

$$a - b = \frac{x^2}{a^2 + ab + b^2}.$$

Това значи:

$$\sqrt[3]{1 + x^2} - 1 = \frac{x^2}{a^2 + a + 1}.$$

Делим на x :

$$\frac{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1}{x} = \frac{x^2}{x(a^2 + a + 1)} = \frac{x}{a^2 + a + 1}.$$

Когато $x \rightarrow 0$, имаме $a = \sqrt[3]{1 + x^2} \rightarrow 1$, така че знаменателят $\rightarrow 1^2 + 1 + 1 = 3$, а числителят $x \rightarrow 0$. Значи:

$$\boxed{0}.$$

13. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$

Решение: Директно е $0/0$. Рационализираме числителя:

$$\frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5} \cdot \frac{\sqrt{x-1} + 2}{\sqrt{x-1} + 2} = \frac{(x-1) - 4}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x-1} + 2}.$$

Заместваме $x = 5$:

$$\frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}.$$

$$\boxed{\frac{1}{4}}.$$

14. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$

Решение: Директно е $0/0$. Рационализираме знаменателя:

$$\frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+1}{\sqrt{x+4}+1} = \frac{(x+3)(\sqrt{x+4}+1)}{(x+4)-1} = \frac{(x+3)(\sqrt{x+4}+1)}{x+3}.$$

За $x \neq -3$ съкращаваме $x+3$:

$$\sqrt{x+4} + 1.$$

Заместваме $x = -3$:

$$\sqrt{1} + 1 = 2.$$

$$\boxed{2}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+n} - \sqrt{n}}{x} \quad (n > 0)$$

Решение: Директно е $0/0$. Рационализираме:

$$\frac{\sqrt{n+x} - \sqrt{n}}{x} \cdot \frac{\sqrt{n+x} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+x} + \sqrt{n}} = \frac{(n+x) - n}{x(\sqrt{n+x} + \sqrt{n})} = \frac{x}{x(\sqrt{n+x} + \sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n+x} + \sqrt{n}}.$$

Сега $x \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

$$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{n}}}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$$

Решение: Директно е $0/0$. Тук най-чисто е замяна.

Нека:

$$t = \sqrt[4]{x}.$$

Тогава:

$$\sqrt{x} = x^{1/2} = (x^{1/4})^2 = t^2.$$

Когато $x \rightarrow 16$, $\sqrt[4]{16} = 2$, тоест $t \rightarrow 2$.

Изразът става:

$$\frac{t - 2}{t^2 - 4}.$$

Факторизираме:

$$t^2 - 4 = (t - 2)(t + 2).$$

Съкращаваме $t - 2$ (за $t \neq 2$):

$$\frac{1}{t + 2}.$$

Сега заместваме $t = 2$:

$$\frac{1}{4}.$$

$$\boxed{\frac{1}{4}}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$$

Решение: Директно е $0/0$. Рационализираме числителя:

$$\frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{(x+3) - 4}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2}.$$

Заместваме $x = 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}.$$
$$\boxed{\frac{1}{4}}.$$

11. Доказателство за формулата за сбор на квадрати

Цел:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Стъпка 1: Разлика на кубове за два последователни члена

Започваме от тъждеството за разлика на кубове:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Избираме $a = n$ и $b = n - 1$. Тогава $a - b = 1$, и получаваме:

$$n^3 - (n - 1)^3 = (n - (n - 1))(n^2 + n(n - 1) + (n - 1)^2) = 1 \cdot (n^2 + n(n - 1) + (n - 1)^2).$$

Сега разкриваме скобата:

$$n^2 + n(n - 1) + (n - 1)^2 = n^2 + (n^2 - n) + (n^2 - 2n + 1) = 3n^2 - 3n + 1.$$

Следователно:

$$\boxed{n^3 - (n - 1)^3 = 3n^2 - 3n + 1}.$$

Стъпка 2: Пишем същото за всички стъпки надолу

По същия начин:

$$(n - 1)^3 - (n - 2)^3 = 3(n - 1)^2 - 3(n - 1) + 1,$$

$$(n - 2)^3 - (n - 3)^3 = 3(n - 2)^2 - 3(n - 2) + 1,$$

$$\vdots$$

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1,$$

$$1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1.$$

Стъпка 3: Събираме всички равенства

Събираме лявата страна на всички равенства:

$$(n^3 - (n-1)^3) + ((n-1)^3 - (n-2)^3) + \cdots + (1^3 - 0^3).$$

Всичко по средата се съкращава:

$$-(n-1)^3 + (n-1)^3, \quad -(n-2)^3 + (n-2)^3, \quad \dots, \quad -1^3 + 1^3,$$

и остава само:

$$n^3 - 0^3 = n^3.$$

Сега събираме дясната страна. Получаваме:

$$n^3 = (3n^2 - 3n + 1) + (3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1) + \cdots + (3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1).$$

Групираме „по типове“ членове:

- квадратите: $3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$
- линейните: $-3(1 + 2 + \cdots + n)$
- единиците: $1 + 1 + \cdots + 1$ (общо n пъти) $\Rightarrow n$

Тоест:

$$n^3 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \sum_{k=1}^n k + n.$$

Стъпка 4: Изолираме $\sum k^2$

Преместваме останалите членове:

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 = n^3 + 3 \sum_{k=1}^n k - n.$$

Делим на 3:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3} \left(n^3 + 3 \sum_{k=1}^n k - n \right).$$

Знаем формулата за сумата на първите n естествени числа:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Замествайки:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3} \left(n^3 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n \right).$$

Стъпка 5: Опростяване до класическата формула

Изнасяме n :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{3} \left(n^2 + \frac{3(n+1)}{2} - 1 \right).$$

Събираме в една дроб:

$$n^2 + \frac{3(n+1)}{2} - 1 = \frac{2n^2 + 3(n+1) - 2}{2} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{2}.$$

Тогава:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{3} \cdot \frac{2n^2 + 3n + 1}{2} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}.$$

Факторизираме:

$$2n^2 + 3n + 1 = (2n + 1)(n + 1).$$

Накрая получаваме:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$