

Производна: наклон, допирателна и „скорост на промяна“

Лекция 2 — подготовка за диференциално смятане и AI

0. Цел на лекцията

Днес:

- правим **кратък преговор** на функция, графика, наклон и идея за граница
- строим идеята за **производна** като *наклон в точка* и *моментна скорост*
- стигаме до **официалната дефиниция** (накрая на интуицията)
- извеждаме и/или доказваме **част от правилата** и правим **таблица с всички основни правила**
- решаваме **първите 20 задачи** с подробни решения

Въпроси за бърза проверка

1. Кое е **по-важното** в тази лекция: формулите или смисълът зад тях? (Обясни с 1 изречение.)
2. Дай пример за „скорост на промяна“ от реалния живот (не математика/физика по учебник).
3. Какво очакваш да може да прави производната, което наклонът на права вече прави лесно?

1. Преговор (5–10 мин)

1.1 Функция

Функция е правило, което на всеки допустим вход x съпоставя точно една стойност $f(x)$. Графиката е множеството точки $(x, f(x))$.

Въпроси

1. Ако имаме две различни стойности y за един и същ x , това функция ли е?
2. Кое е графиката: формулата $f(x)$ или множеството точки $(x, f(x))$?
3. Дай пример за правило, което **не** е функция (с думи, не е нужно формула).

1.2 Наклон на права

За права $y = ax + b$ наклонът е a . Това е:

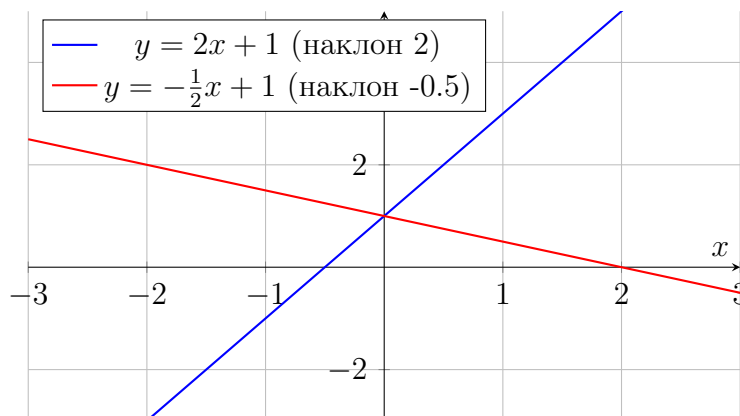
$$\text{наклон} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Интуиция: „колко се вдига y , когато x се увеличи с 1“.

Въпроси

1. Какво означава наклон $m = 3$ с думи?
2. Ако $x_2 - x_1 < 0$, може ли наклонът пак да е положителен? (Да/не + 1 изречение.)
3. Намери наклона на правата през точките $(1, 2)$ и $(3, 8)$.

Графика: две прави с различен наклон

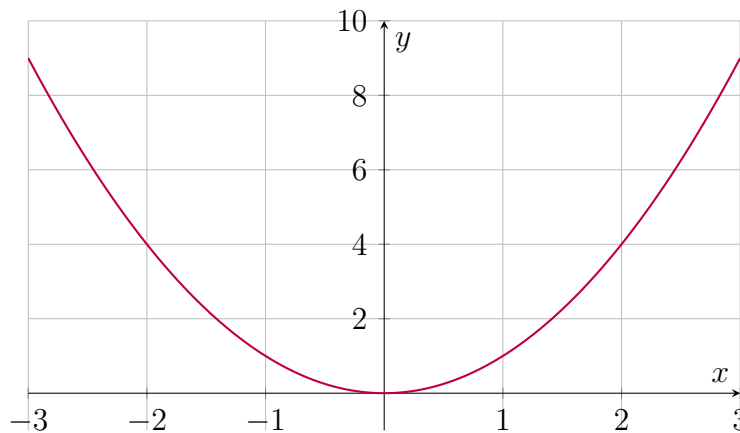


1.3 Крива (пример: x^2)

За $f(x) = x^2$ наклонът **не** е един и същ навсякъде. Точно това „неудобство“ ражда производната.

Въпроси

1. Защо казваме, че „наклонът на x^2 не е един и същ навсякъде“?
2. Къде очакваш x^2 да е по-стръмна: около $x = 0$ или около $x = 3$? Защо?
3. Ако сравниш наклона около $x = -2$ и около $x = 2$, какъв знак очакваш да имат? (плюс/минус)



2. Големият въпрос

Как да измерим „наклона“ на крива **в една точка**?

На права наклонът е константа. На крива идеята е: първо мерим наклон **между две точки** (среден наклон), после „сгъваме“ втората точка към първата, докато получим **наклон в точката**.

Въпроси

1. Каква е разликата между „наклон между две точки“ и „наклон в точка“?
2. Какво правим с втората точка, за да преминем от секуща към допирателна?
3. Ако една крива има „ръб“ (ъгъл) в точка, какво подозираш за наклона в тази точка?

3. Секуща права: наклон между две точки

3.1 Какво е секуща?

Вземаме две точки на графиката:

$$A(x, f(x)), \quad B(x+h, f(x+h)).$$

Правата през тях се нарича **секуща**.

Въпроси

1. Секущата минава през колко точки от графиката?
2. Ако B се приближава към A , секущата към какво се стреми?
3. Ако $h = 0$, можем ли да говорим за секуща по формулата? Защо?

3.2 Наклон на секущата (средна скорост на промяна)

Наклонът е:

$$m_{\text{сек}}(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Какво означава това с думи?

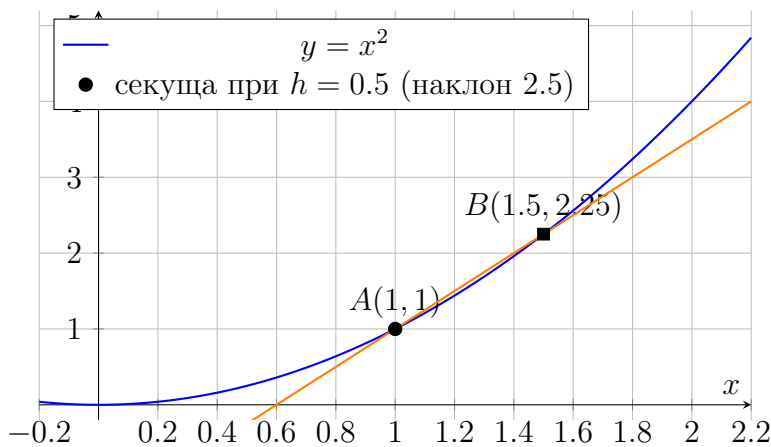
- $f(x+h) - f(x)$ е „колко се е променило y “.
- h е „колко сме се преместили по x “.
- $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ е „промяна на y на 1 единица промяна на x “.

Въпроси

1. В израза $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ кое е Δy и кое е Δx ?
2. Какво означава „средна скорост на промяна“ с 1 изречение?
3. Ако $f(x+h) - f(x)$ е отрицателно и $h > 0$, какъв е знакът на наклона?

Графика: една секуща към $y = x^2$ при $x = 1$ (само една, да не се претрупва)

Вземаме $h = 0.5$. Тогава $A(1, 1)$ и $B(1.5, 2.25)$.



3.3 Наблюдение

Когато h става по-малко, секущата започва да „залепва“ за графиката около A . Тя се стреми към една специална права — **допирателната**.

Въпроси

1. Какво означава „секущата залепва за графиката“ (с думи)?
2. Коя идея вече сме виждали и в лекция 1: „приближение $\rightarrow$ граница“ или „факторизация“?
3. Какво се променя, когато h става по-малко: точката A , точката B , или и двете?

4. Допирателна: „най-добрата права“ в точка

Какво е допирателна?

Допирателната в точка е права, която локално съвпада по посока с кривата.

Мисловен експеримент: ако увеличиш мащаба достатъчно около точка на гладка крива, кривата започва да изглежда като права. Тази права е допирателната.

Въпроси

1. Как разпознаваш „добра“ допирателна в една точка (интуитивно)?
2. Ако увеличаваш мащаба около точка на гладка крива, какво виждаш?
3. Допирателната пресича ли задължително графиката само в една точка? (Да/не + кратко обяснение.)

5. Производна: какво е

5.1 Производната като наклон в точка

Производната $f'(x)$ е **наклонът на допирателната** към графиката на f в точката с абсциса x .

Въпроси

1. Какво е $f'(x)$ като „геометричен обект“: точка, права, или число?
2. Ако $f'(x) > 0$, функцията расте ли или спада около тази точка?
3. Ако $f'(x) = 0$, задължително ли имаме максимум/минимум? (Да/не + 1 изречение.)

5.2 Производната като „моментна скорост“

Ако x е време t , а $f(t)$ е изминато разстояние, тогава:

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

е средната скорост за интервала $[t, t+h]$. Когато $h \rightarrow 0$, това става **скоростта в точния момент t** .

Въпроси

1. Каква е разликата между средна и моментна скорост (в езика на формулата)?
2. Ако $f(t)$ е температура, какво би означавало $f'(t)$?
3. Защо $h \rightarrow 0$ е важно за „моментната“ идея?

5.3 Защо ни трябва граница?

Защото за една точка нямаме „втора точка“ за да сметнем наклон. Правим си втора точка на разстояние h , мерим среден наклон, и после **працаме** h към 0.

Въпроси

1. Защо не можем просто да сложим $h = 0$ във $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$?
2. Какво правим вместо това? (кажи с 1 изречение)
3. Какво означава, че „границата съществува“ (интуитивно)?

6. Пример с $f(x) = x^2$: наклон в обща точка x

Това е ключов момент: ще сметнем наклона „в точката x “, не само при $x = 1$.

Секуцият наклон е:

$$m_{\text{сек}}(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}.$$

Разкриваме $(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$:

$$m_{\text{сек}}(h) = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h.$$

Какво виждаме?

- Докато $h \neq 0$, това е наклон на секуща: $2x + h$.
- Когато h стане много малко, $2x + h$ става много близо до $2x$.

Следователно наклонът „в точката x “ е $2x$, тоест:

$$f'(x) = 2x.$$

Въпроси

1. Как получихме $2x + h$ от $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$? (посочи ключовата стъпка)
2. Когато $h \rightarrow 0$, кое изчезва и кое остава?
3. Колко е наклонът на x^2 при $x = 3$ според $f'(x) = 2x$?

Мини-табличка за усещане

$x = -2 \Rightarrow f'(x) = -4$ (спада), $x = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$ (хоризонтално), $x = 2 \Rightarrow f'(x) = 4$ (расте стръмно)

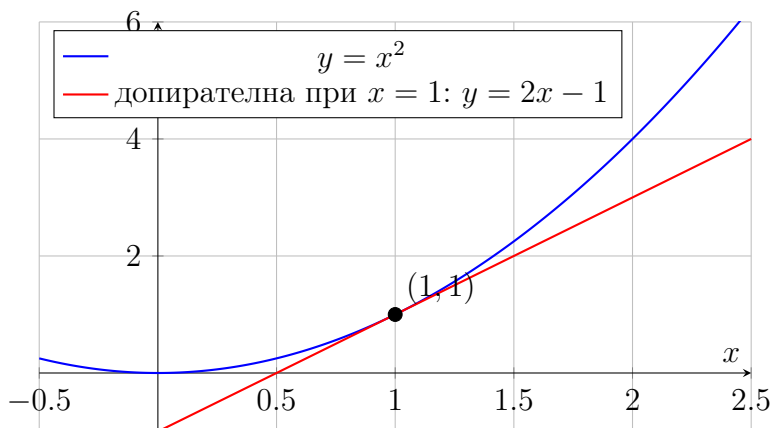
7. Графика: допирателна при $x = 1$ към $y = x^2$

От горното $f'(1) = 2$. Правата с наклон 2 през $(1, 1)$ е:

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 1.$$

Въпроси

1. Коя точка използваме, за да построим допирателната при $x = 1$?
2. Защо формата $y - y_0 = m(x - x_0)$ е удобна тук?
3. Ако наклонът беше -2 , как визуално щеше да изглежда правата около точката?



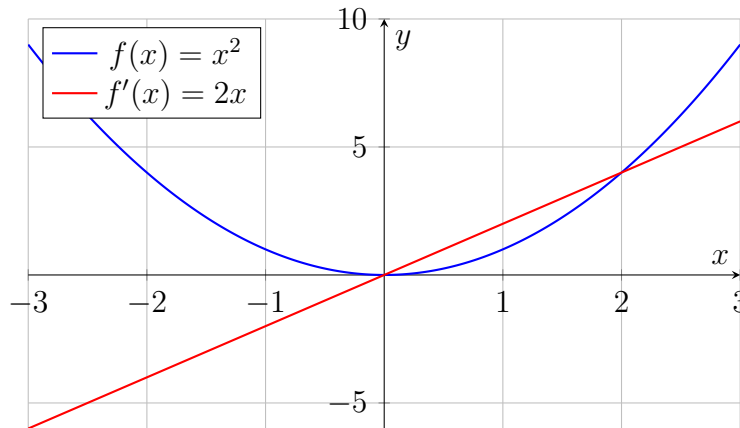
8. Производната като функция

Производната не е само число. Когато я знаем за всяко x , получаваме нова функция $f'(x)$.

За $f(x) = x^2$ получихме $f'(x) = 2x$. Да ги видим заедно:

Въпроси

1. Какво означава „производната е функция“, а не само число?
2. Къде $2x$ е положителна, къде отрицателна и какво казва това за x^2 ?
3. Какво означава пресичането на графиката на $f'(x)$ с оста x ?



Как да четем картинката?

- Където $f'(x) > 0$ — f расте.
- Където $f'(x) < 0$ — f спада.
- Където $f'(x) = 0$ — често имаме кандидат за минимум/максимум (ще го формализираме по-късно).

9. За какво служи производната (най-полезните 3 приложения)

9.1 Растене и спадане

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ расте}, \quad f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ спада.}$$

Въпроси

1. Ако $f'(x) < 0$ в интервала $(1, 4)$, какво прави f в този интервал?
2. Ако $f'(x) = 0$ за всички x , каква е функцията f ?
3. Може ли функция да „расте“ и в същото време производната ѝ да е отрицателна? (Да/не + защо.)

9.2 Минимум и максимум (интуиция)

Във връх на гладка крива допирателната е хоризонтална, тоест:

$$f'(x) = 0.$$

Въпроси

1. Защо във връх очакваме $f'(x) = 0$?
2. Каква е разликата между „кандидат за екстремум“ и „сигурен екстремум“?
3. Дай пример за функция, при която $f'(x) = 0$ в точка, но няма максимум/минимум там (само идея).

9.3 Оптимизация (връзка с AI)

В машинното обучение имаме функция „грешка“ (loss). Искаме да я намалим. Производната (а по-късно градиентът) казва **посоката на най-бързото нарастване**. За да намалим, се движим в обратната посока.

Въпроси

1. Ако „loss“ расте, производната (по параметър) какъв знак има обикновено в посоката на движението?
2. Защо „отиваме в обратната посока“ на производната при оптимизация?
3. Какво би означавало „производната е 0“ в контекст на оптимизация?

10. Официалната дефиниция за производна (в края на интуицията)

10.1 Дефиниция

Казваме, че f е диференцируема в точката x , ако съществува границата:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Това число е производната на f в точката x .

Въпроси

1. Какво е h в дефиницията — число, точка, или интервал?
2. Какво измерва $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ преди да пуснем $h \rightarrow 0$?
3. Защо пишем $\lim_{h \rightarrow 0}$ вместо $\lim_{h \rightarrow \infty}$?

10.2 Какво ако границата не съществува?

Тогава казваме, че производната **не съществува** в тази точка. Пример (само идея): $f(x) = |x|$ при $x = 0$ има „ъгъл“ (ляв наклон -1 , десен наклон $+1$).

Въпроси

1. Какво значи „ляв наклон“ и „десен наклон“?
2. За $|x|$ при $x = 0$: какви са тези два наклона?
3. Ако левият и десният наклон са различни, производната съществува ли?

11. Правила за производни: извеждане, доказателства и таблица

11.1 Първи „лесни“ правила (доказуеми директно от дефиницията)

(1) **Производна на константа.** Ако $f(x) = C$, тогава:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C - C}{h} = 0.$$

(2) **Константен множител.** Ако $f(x) = C \cdot g(x)$, тогава:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Cg(x+h) - Cg(x)}{h} = C \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = Cg'(x).$$

(3) **Сбор/разлика.** Ако $f(x) = g(x) + u(x)$, тогава:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x+h) + u(x+h)] - [g(x) + u(x)]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right) = g'(x) + u'(x)$$

Въпроси

1. Защо производната на константа е 0 (кажи с 1 изречение)?
2. Ако $f(x) = 7g(x)$, как се променя производната спрямо $g'(x)$?
3. Ако $f(x) = g(x) - u(x)$, каква е $f'(x)$?

11.2 Правило за степен x^n (идея + доказателство за цели $n \geq 1$)

За $f(x) = x^n$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Разкриваме $(x + h)^n$ по бинома на Нютон:

$$(x + h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n.$$

Тогава:

$$(x + h)^n - x^n = nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n.$$

Делим на h :

$$\frac{(x + h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1}.$$

Когато $h \rightarrow 0$, всички членове с h изчезват и остава:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Въпроси

1. Каква е производната на x^3 според правилото?
2. Защо членовете с h „изчезват“, когато $h \rightarrow 0$?
3. Какво става ако $n = 1$? Получаваме ли правилно, че производната на x е 1?

11.3 Произведение и частно (ще ги ползваме много)

Правило за произведение:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Кратко доказателство (с дефиницията):

$$(uv)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}.$$

Добавяме и изваждаме $u(x+h)v(x)$ в числителя:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h}.$$

Групираме:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[u(x+h) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right].$$

Когато $h \rightarrow 0$, $u(x+h) \rightarrow u(x)$, а дробите $\rightarrow v'(x)$ и $\rightarrow u'(x)$. Значи:

$$(uv)' = u(x)v'(x) + v(x)u'(x) = u'v + uv'.$$

Правило за частно:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

(Може да се получи от правилото за произведение, като $\frac{u}{v} = u \cdot v^{-1}$.)

11.4 Таблица с основни производни и правила

Функция	Производна
C	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
Правило	Формула
$(u \pm v)'$	$u' \pm v'$
$(Cu)'$	Cu'
$(uv)'$	$u'v + uv'$
$\left(\frac{u}{v}\right)'$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Въпроси

1. Коя функция има същата производна като себе си?
2. Каква е производната на $\cos x$?
3. Ако видиш $\sqrt{x}$, първо би я преписал като x^α . Какво е α ?

12. Задачи (първите 20 от „Домашно 2“) — подробни решения

Съвет за решаване: почти винаги първо **препиши** функцията като степени, после ползвай правила.

Въпроси (преди да смятаме)

1. Коя е първата „техническа“ стъпка, която почти винаги правим при производни? (подсказка: степени)
2. При произведение кое правило ползваме?

3. При дроб u/v кое правило ползваме?

1) $y = \frac{1}{x^2}$

Преписваме като степен:

$$y = x^{-2}.$$

Правило за степен:

$$y' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

$$\boxed{y' = -\frac{2}{x^3}}$$

2) $y = x\sqrt{x}$

Първо като степени:

$$\sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow y = x \cdot x^{1/2} = x^{3/2}.$$

Сега:

$$y' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

$$\boxed{y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}}$$

3) $y = \frac{4}{x^2}$

$$y = 4x^{-2} \Rightarrow y' = 4 \cdot (-2)x^{-3} = -8x^{-3} = -\frac{8}{x^3}.$$

$$\boxed{y' = -\frac{8}{x^3}}$$

4) $y = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x^{-1}} + 3x^{-2} - (5x)^{-1} + 4$

Преписваме всичко като степени:

$$\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}, \quad \sqrt{x^{-1}} = (x^{-1})^{1/2} = x^{-1/2}, \quad (5x)^{-1} = \frac{1}{5x} = \frac{1}{5}x^{-1}.$$

Значи:

$$y = x^{2/3} - 2x^{-1/2} + 3x^{-2} - \frac{1}{5}x^{-1} + 4.$$

Диференцираме по членове:

$$y' = \frac{2}{3}x^{-1/3} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} + 3 \cdot (-2)x^{-3} - \frac{1}{5} \cdot (-1)x^{-2} + 0.$$

Опрости́ваме:

$$y' = \frac{2}{3}x^{-1/3} + x^{-3/2} - 6x^{-3} + \frac{1}{5}x^{-2}.$$

$$\boxed{y' = \frac{2}{3}x^{-1/3} + x^{-3/2} - 6x^{-3} + \frac{1}{5}x^{-2}}$$

5) $y = x^5 \sqrt[3]{x}$

$$\sqrt[3]{x} = x^{1/3} \Rightarrow y = x^5 \cdot x^{1/3} = x^{16/3}.$$

$$y' = \frac{16}{3}x^{13/3}.$$

$$\boxed{y' = \frac{16}{3}x^{13/3}}$$

6) $y = \frac{5x^2 - x - 1}{x}$

Разделя́ме поотделно:

$$y = \frac{5x^2}{x} - \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = 5x - 1 - x^{-1}.$$

$$y' = 5 - 0 - (-1)x^{-2} = 5 + x^{-2} = 5 + \frac{1}{x^2}.$$

$$\boxed{y' = 5 + \frac{1}{x^2}}$$

7) $y = 6x^3 - 4x^2 + 10x$

По членове:

$$y' = 18x^2 - 8x + 10.$$

$$\boxed{y' = 18x^2 - 8x + 10}$$

8) $y = (x^2 + 1)(x^2 - x + 1)$

Ползва́ме правило за произве́дение. Нека

$$u = x^2 + 1, \quad v = x^2 - x + 1.$$

Тогава:

$$u' = 2x, \quad v' = 2x - 1.$$

$$y' = (uv)' = u'v + uv' = (2x)(x^2 - x + 1) + (x^2 + 1)(2x - 1).$$

Разкрива́ме:

$$(2x)(x^2 - x + 1) = 2x^3 - 2x^2 + 2x,$$

$$(x^2 + 1)(2x - 1) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1.$$

Събираме:

$$y' = (2x^3 + 2x^3) + (-2x^2 - x^2) + (2x + 2x) - 1 = 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1.$$

$$\boxed{y' = 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1}$$

9) $y = (1 - 3x + 7x^2)(-5x^2 - 1)$

Пак произведение. Нека:

$$u = 1 - 3x + 7x^2, \quad v = -5x^2 - 1.$$

Тогава:

$$u' = -3 + 14x, \quad v' = -10x.$$

$$y' = u'v + uv' = (-3 + 14x)(-5x^2 - 1) + (1 - 3x + 7x^2)(-10x).$$

Разкриваме първия член:

$$(-3 + 14x)(-5x^2 - 1) = 15x^2 + 3 - 70x^3 - 14x.$$

Вторият:

$$(1 - 3x + 7x^2)(-10x) = -10x + 30x^2 - 70x^3.$$

Събираме:

$$y' = (-70x^3 - 70x^3) + (15x^2 + 30x^2) + (-14x - 10x) + 3 = -140x^3 + 45x^2 - 24x + 3.$$

$$\boxed{y' = -140x^3 + 45x^2 - 24x + 3}$$

10) $y = x^2(1 - x^2)$

Първо опростяваме:

$$y = x^2 - x^4.$$

$$y' = 2x - 4x^3.$$

$$\boxed{y' = 2x - 4x^3}$$

11) $y = \frac{1 - x}{1 + x}$

Частно. Нека $u = 1 - x$, $v = 1 + x$.

$$u' = -1, \quad v' = 1.$$

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(-1)(1 + x) - (1 - x)(1)}{(1 + x)^2}.$$

Числител:

$$-(1 + x) - (1 - x) = -2.$$

$$\boxed{y' = -\frac{2}{(1 + x)^2}}$$

$$12) \ y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1, \ v = x^2 - 1 \Rightarrow v' = 2x.$$

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(x^2 - 1) - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}.$$

$$\boxed{y' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}}$$

$$13) \ y = \frac{5}{6x - 4}$$

$$y = 5(6x - 4)^{-1}.$$

$$y' = 5 \cdot [-6(6x - 4)^{-2}] = -30(6x - 4)^{-2}.$$

$$\boxed{y' = -\frac{30}{(6x - 4)^2}}$$

$$14) \ y = \frac{2x - 3}{5 - 4x}$$

$$\text{Частно: } u = 2x - 3 \Rightarrow u' = 2, \ v = 5 - 4x \Rightarrow v' = -4.$$

$$y' = \frac{2(5 - 4x) - (2x - 3)(-4)}{(5 - 4x)^2}.$$

Числитель:

$$2(5 - 4x) = 10 - 8x, \quad (2x - 3)(-4) = -8x + 12,$$

$$10 - 8x - (-8x + 12) = -2.$$

$$\boxed{y' = -\frac{2}{(5 - 4x)^2}}$$

$$15) \ y = \frac{2x^2}{1 - 7x}$$

$$\text{Частно: } u = 2x^2 \Rightarrow u' = 4x, \ v = 1 - 7x \Rightarrow v' = -7.$$

$$y' = \frac{4x(1 - 7x) - 2x^2(-7)}{(1 - 7x)^2} = \frac{4x - 28x^2 + 14x^2}{(1 - 7x)^2} = \frac{4x - 14x^2}{(1 - 7x)^2}.$$

$$4x - 14x^2 = 2x(2 - 7x).$$

$$\boxed{y' = \frac{2x(2 - 7x)}{(1 - 7x)^2}}$$

$$16) \ y = \frac{3}{6-x}$$

$$y = 3(6-x)^{-1}.$$

$$\frac{d}{dx}(6-x)^{-1} = -(6-x)^{-2} \cdot (-1) = (6-x)^{-2}.$$

$$y' = 3(6-x)^{-2} = \frac{3}{(6-x)^2}.$$

$$\boxed{y' = \frac{3}{(6-x)^2}}$$

$$17) \ y = \frac{-7}{3-10x}$$

$$y = -7(3-10x)^{-1}.$$

$$\frac{d}{dx}(3-10x)^{-1} = -(3-10x)^{-2} \cdot (-10) = 10(3-10x)^{-2}.$$

$$y' = -7 \cdot 10(3-10x)^{-2} = -70(3-10x)^{-2}.$$

$$\boxed{y' = -\frac{70}{(3-10x)^2}}$$

$$18) \ y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$u = ax + b \Rightarrow u' = a, \quad v = cx + d \Rightarrow v' = c.$$

$$y' = \frac{a(cx+d) - (ax+b)c}{(cx+d)^2}.$$

$$a(cx+d) - (ax+b)c = acx + ad - acx - bc = ad - bc.$$

$$\boxed{y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}}$$

$$19) \ y = \sin x \cos x$$

$$y' = \cos x \cos x + \sin x(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$$

$$\boxed{y' = \cos 2x}$$

$$20) \ y = x^3 \cos x$$

$$u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2, \quad v = \cos x \Rightarrow v' = -\sin x.$$

$$y' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x.$$

$$\boxed{y' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x}$$

13. Какво следва (Лекция 3)

Следващия път:

- верижно правило (chain rule) + производни на „сложни“ функции
- повече задачи за допирателни, производна в точка, графични интерпретации
- първи задачи за екстремуми и оптимизация (вкл. мини-паралел с gradient descent)