

Верижно правило + логаритми

Лекция 3 — подготовка за диференциално смятане и AI

0. Цел на лекцията

Днес:

- преговор на идеята за производна (наклон/моментна скорост)
- въвеждаме **верижното правило** (chain rule) и довършваме **всички основни правила**
- правим **голяма таблица** с базови функции и производни (вкл. „още неучени“ функции)
- проверяваме интуицията с **въпроси по теория**
- обясняваме **логаритми** + всички правила
- решаваме задачи: **диференциране + логаритми** (подробно)

1. Преговор: какво беше производната?

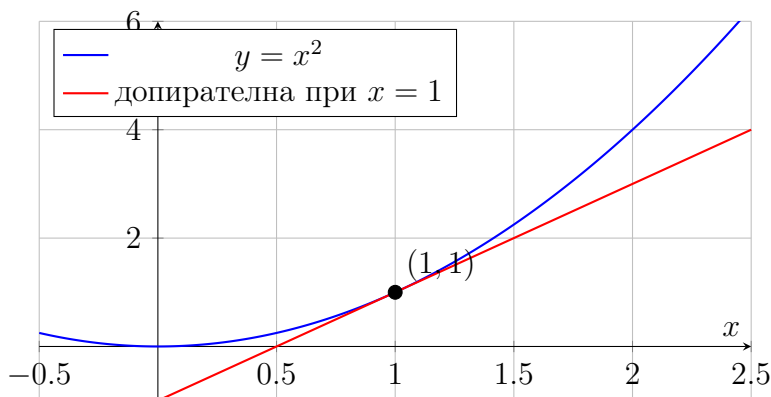
1.1 Смисъл

Производната $f'(x)$ е **наклонът на допирателната** към графиката $y = f(x)$ в точката с абсциса x . Ако x е време, $f(x)$ може да е позиция, и тогава $f'(x)$ е **моментна скорост**.

Въпроси

1. Ако $f'(x) > 0$ в някакъв интервал, f там расте ли или спада?
2. Какво геометрично означава $f'(a) = 0$?
3. Може ли функция да има минимум в точка, където производната не съществува? (Да/Не + пример-идея)

Мини-графика: $f(x) = x^2$ и допирателна в $x = 1$



2. Защо ни трябва верижното правило?

2.1 Идеята с „вложени функции“

Понякога функцията е „функция вътре във функция“:

$$y = (\text{нещо})^2, \quad y = \sin(\text{нещо}), \quad y = e^{(\text{нещо})}.$$

Пример:

$$y = (3x + 1)^2.$$

Това не е просто x^2 , а квадрат на линейна функция.

Въпроси

1. Кое е „вътрешната“ функция и кое е „външната“ при $y = (3x + 1)^2$?
2. Ако x се промени малко, кое се променя първо: вътрешната или външната стойност?
3. Ако вътрешната функция расте 3 пъти по-бързо, как очакваш да влияе това на наклона на цялата функция?

2.2 Работеща интуиция (без формули)

Мисли така:

„Промяната на y зависи от промяната на вътрешното нещо, а то зависи от промяната на x .“

Тоест имаме два „мултипликатора на промяната“, които се умножават.

3. Верижно правило (chain rule)

3.1 Формулировка

Ако

$$y = f(u), \quad u = g(x),$$

тогава композицията е $y = f(g(x))$ и:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}} \quad \text{или} \quad \boxed{(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}.$$

3.2 Как се чете?

- $\frac{dy}{du}$: колко се променя y , ако „бутнем“ вътрешното u с 1.
- $\frac{du}{dx}$: колко се променя u , ако „бутнем“ x с 1.
- умножението казва: „ефект върху y = ефектът по пътя $x \rightarrow u$ по ефектът $u \rightarrow y$ “.

Въпроси

1. При $y = \sin(5x)$: кое е u ? Кое е f ? Кое е g ?
2. При $y = \sqrt{1+x^2}$: кое е вътрешното „нещо“?
3. Ако забравиш да умножиш по $g'(x)$, какъв тип грешка правиш (концептуално)?

3.3 Мини-доказателство (идея от дефиницията)

Нека $y = f(u)$ и $u = g(x)$. За малка промяна h :

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}.$$

Добавяме и изваждаме $g(x+h) - g(x)$ като междинна стъпка (интуитивно):

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Когато $h \rightarrow 0$, вторият множител $\rightarrow g'(x)$, а първият $\rightarrow f'(g(x))$. Затова:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

(Този аргумент става напълно строг при добри условия за гладкост.)

4. Всички основни правила за диференциране (супер важно)

4.1 Правила (в компактна форма)

$$(C)' = 0, \quad (x)' = 1, \quad (x^n)' = nx^{n-1}.$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (Cu)' = Cu'.$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x) \quad (\text{верижно правило}).$$

4.2 Базови функции (които ще ползваме постоянно)

$$(e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Въпроси

1. Кое правило използваш, ако имаш $\sin(3x^2)$?
2. Кое правило използваш, ако имаш $(x^2 + 1)(x - 5)$?
3. Кое правило използваш, ако имаш $\frac{x^2+1}{x^3-7}$?

5. Голямата таблица с производни (за „cheat sheet“)

Функция	Производна
C	0
x	1
$x^n \ (n \in \mathbb{Z})$	nx^{n-1}
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2}$
e^x	e^x
$a^x \ (a > 0, a \neq 1)$	$a^x \ln a$
$\ln x \ (x > 0)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x \ (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Забележка: някои функции тук са „за напред“, но таблицата е удобна като справочник.

6. Теория-куиз (интуиция до тук)

Въпроси (без смятане)

1. Какво означава $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ геометрично?
2. Защо изобщо ни трябва граница $h \rightarrow 0$?
3. Ако функция е гладка и има локален максимум в $x = a$, какво очакваш за $f'(a)$?
4. Каква е връзката между знака на $f'(x)$ и растене/спадане?
5. Какво казва верижното правило $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$ с думи?
6. Защо $f(x) = |x|$ няма производна в 0 (геометрично)?

7. Логаритми (основи + правила)

7.1 Какво е логаритъм?

Логаритъмът е обратната функция на степенуването.

Ако

$$a^y = x \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0),$$

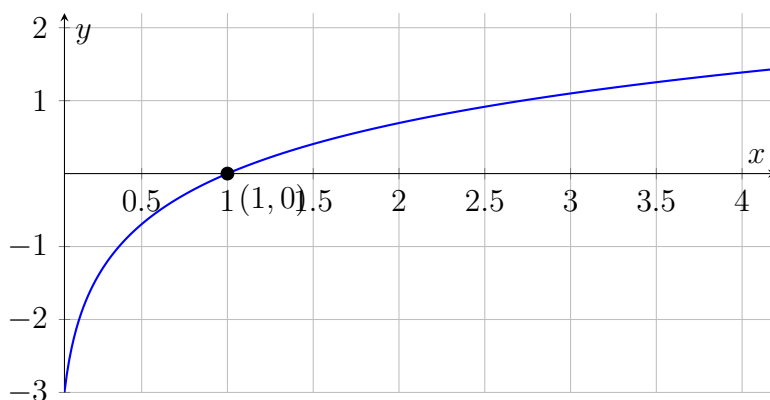
то

$$\boxed{y = \log_a x}.$$

Специални случаи:

$$\ln x = \log_e x, \quad \log x = \log_{10} x \text{ (често в училище).}$$

Графика: $y = \ln x$



Въпроси

1. Защо $\ln 1 = 0$?
2. Защо $\ln x$ е дефинирана само за $x > 0$ (в реални числа)?
3. Какво означава $\log_a x$ като въпрос?

7.2 Основни правила за логаритми

За $a > 0, a \neq 1$ и $x > 0, y > 0$:

$$\boxed{\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y}$$

$$\boxed{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$$

$$\boxed{\log_a(x^k) = k \log_a x}$$

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}} \quad (\text{смяна на основа})$$

Мини-обяснение защо работят (със степени)

Ако $x = a^m$ и $y = a^n$, тогава $xy = a^{m+n}$. Логаритъмът „връща“ показателя:

$$\log_a(xy) = \log_a(a^{m+n}) = m + n = \log_a x + \log_a y.$$

(Останалите правила се получават аналогично.)

Въпроси

1. Пресметни наум: $\log_2 8$, $\log_{10} 1000$, $\ln e^3$.
2. Опиши разликата между $\log_a(x + y)$ и $\log_a x + \log_a y$. (Стават ли равни?)
3. Какво означава $\log_a x$ да е отрицателно?

8. Задачи по диференциране — подробни решения

Стратегия (в 1 изречение)

Почти винаги: **разпознай вътрешна функция $\Rightarrow$ верижно правило.**

21) $y = x^3 \sin x + x^3 \cos x$

Това е сума на два произведения. Ползваме правило за сбор и правило за произведение.

$$y = x^3 \sin x + x^3 \cos x.$$

Първи член: $x^3 \sin x$. Нека $u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2$, $v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$.

$$(x^3 \sin x)' = u'v + uv' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x.$$

Втори член: $x^3 \cos x$. Нека $u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2$, $v = \cos x \Rightarrow v' = -\sin x$.

$$(x^3 \cos x)' = 3x^2 \cos x + x^3(-\sin x) = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x.$$

Събираме:

$$y' = (3x^2 \sin x + x^3 \cos x) + (3x^2 \cos x - x^3 \sin x).$$

$$\boxed{y' = 3x^2(\sin x + \cos x) + x^3(\cos x - \sin x)}.$$

Въпрос

Къде тук се използва произведение, и защо не може „по членове“ без него?

22) $y = \frac{3}{\cos^2(2x)}$

Първо преписваме:

$$y = 3 \cdot (\cos(2x))^{-2}.$$

Тук имаме композиция: „външна“ степен (-2) , „вътрешна“ $\cos(\cdot)$, и още по-вътрешна $2x$. Ползваме верижно правило на слоеве.

$$y' = 3 \cdot (-2)(\cos(2x))^{-3} \cdot \frac{d}{dx}(\cos(2x)).$$

$$\frac{d}{dx}(\cos(2x)) = -\sin(2x) \cdot 2.$$

Така:

$$y' = 3 \cdot (-2)(\cos(2x))^{-3} \cdot (-2 \sin(2x)) = 12 \frac{\sin(2x)}{\cos^3(2x)}.$$

$$\boxed{y' = \frac{12 \sin(2x)}{\cos^3(2x)}}.$$

23) $y = (a + bx)^2$

$$y = (a + bx)^2.$$

Външна функция: квадрат $f(u) = u^2$. Вътрешна: $u = a + bx$.

$$y' = 2(a + bx) \cdot (a + bx)' = 2(a + bx) \cdot b.$$

$$\boxed{y' = 2b(a + bx)}.$$

24) $y = x^4 - 2x^3(a + bx^3)^2$

Разделяме на части:

$$y = x^4 - 2x^3(a + bx^3)^2.$$

Първият член:

$$(x^4)' = 4x^3.$$

Вторият член е произведение: $-2x^3 \cdot (a + bx^3)^2$.

Нека

$$u = -2x^3 \Rightarrow u' = -6x^2, \quad v = (a + bx^3)^2.$$

Тогава:

$$y' = 4x^3 + (uv)' = 4x^3 + u'v + uv'.$$

Остава v' (вещно правило):

$$v' = 2(a + bx^3) \cdot (a + bx^3)' = 2(a + bx^3) \cdot (3bx^2) = 6bx^2(a + bx^3).$$

Сега:

$$\begin{aligned}u'v &= (-6x^2)(a + bx^3)^2, \\uv' &= (-2x^3) \cdot (6bx^2(a + bx^3)) = -12bx^5(a + bx^3).\end{aligned}$$

Значи:

$$\boxed{y' = 4x^3 - 6x^2(a + bx^3)^2 - 12bx^5(a + bx^3)}.$$

25) $y = \sqrt[3]{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{1/3}$

Верижно правило:

$$\begin{aligned}y &= (x^2 + 1)^{1/3}. \\y' &= \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{-2/3} \cdot (2x) = \frac{2x}{3(x^2 + 1)^{2/3}}.\end{aligned}$$

$$\boxed{y' = \frac{2x}{3(x^2 + 1)^{2/3}}}.$$

26) $y = (x^2 + 1)^{3/4}$

$$\begin{aligned}y &= (x^2 + 1)^{3/4}. \\y' &= \frac{3}{4}(x^2 + 1)^{-1/4} \cdot 2x = \frac{3x}{2(x^2 + 1)^{1/4}}.\end{aligned}$$

$$\boxed{y' = \frac{3x}{2(x^2 + 1)^{1/4}}}.$$

27) $y = \frac{a}{x + 1}$

$$\begin{aligned}y &= a(x + 1)^{-1}. \\y' &= a \cdot (-1)(x + 1)^{-2} \cdot 1 = -\frac{a}{(x + 1)^2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{y' = -\frac{a}{(x + 1)^2}}.$$

28) $y = x^3 - 5x^2 - \frac{3}{x - 1} + 3 \cos(x - 1)$

Диференцираме по членове:

$$(x^3)' = 3x^2, \quad (-5x^2)' = -10x.$$

$$-\frac{3}{x - 1} = -3(x - 1)^{-1} \Rightarrow (-3(x - 1)^{-1})' = -3 \cdot (-1)(x - 1)^{-2} \cdot 1 = \frac{3}{(x - 1)^2}.$$

$$(3 \cos(x-1))' = 3 \cdot (-\sin(x-1)) \cdot (x-1)' = -3 \sin(x-1).$$

Значи:

$$y' = 3x^2 - 10x + \frac{3}{(x-1)^2} - 3 \sin(x-1).$$

$$29) \ y = \frac{1}{(3x+2)^{1/4}} = (3x+2)^{-1/4}$$

$$y = (3x+2)^{-1/4}.$$

$$y' = -\frac{1}{4}(3x+2)^{-5/4} \cdot 3 = -\frac{3}{4(3x+2)^{5/4}}.$$

$$y' = -\frac{3}{4(3x+2)^{5/4}}.$$

$$30) \ y = (x+2)^{2/3}$$

$$y = (x+2)^{2/3}.$$

$$y' = \frac{2}{3}(x+2)^{-1/3} \cdot 1 = \frac{2}{3(x+2)^{1/3}}.$$

$$y' = \frac{2}{3(x+2)^{1/3}}.$$

$$31) \ y = \frac{1}{x^2 \sin x}$$

$$y = (x^2 \sin x)^{-1}.$$

Нека $w = x^2 \sin x$. Тогава $y = w^{-1} \Rightarrow y' = -w^{-2} \cdot w'$.

Сега $w' = (x^2)' \sin x + x^2(\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

Значи:

$$y' = -\frac{2x \sin x + x^2 \cos x}{(x^2 \sin x)^2}.$$

Понеже $(x^2 \sin x)^2 = x^4 \sin^2 x$, получаваме:

$$y' = -\frac{2x \sin x + x^2 \cos x}{x^4 \sin^2 x}.$$

$$32) \quad y = \frac{2 \sin(3x)}{\cos x}$$

Частно: $u = 2 \sin(3x)$, $v = \cos x$.

$$\begin{aligned} u' &= 2 \cdot \cos(3x) \cdot 3 = 6 \cos(3x), & v' &= -\sin x. \\ y' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{6 \cos(3x) \cos x - 2 \sin(3x)(-\sin x)}{\cos^2 x}. \\ \boxed{y' &= \frac{6 \cos(3x) \cos x + 2 \sin(3x) \sin x}{\cos^2 x}.} \end{aligned}$$

$$33*) \quad y = (x^3 + 4) \sin(2x + 1)$$

Произведение + верижно.

$$\begin{aligned} u &= x^3 + 4 \Rightarrow u' = 3x^2, & v &= \sin(2x + 1) \Rightarrow v' = \cos(2x + 1) \cdot 2. \\ y' &= u'v + uv' = 3x^2 \sin(2x + 1) + (x^3 + 4) \cdot 2 \cos(2x + 1). \\ \boxed{y' &= 3x^2 \sin(2x + 1) + 2(x^3 + 4) \cos(2x + 1)}. \end{aligned}$$

$$34) \quad y = \frac{\tan x}{x^{1/3}}$$

$$y = \tan x \cdot x^{-1/3}.$$

Произведение:

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, & (x^{-1/3})' &= -\frac{1}{3}x^{-4/3}. \\ y' &= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot x^{-1/3} + \tan x \cdot \left(-\frac{1}{3}x^{-4/3}\right). \\ \boxed{y' &= \frac{1}{x^{1/3} \cos^2 x} - \frac{\tan x}{3x^{4/3}}}. \end{aligned}$$

$$35) \quad y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} y' &= -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right)'. \\ \boxed{y' &= -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}. \end{aligned}$$

9. Още няколко задачи (измислени) за верижното правило — подробни решения

C1) $y = (1 - 2x)^7$

$$y' = 7(1 - 2x)^6 \cdot (-2) = \boxed{-14(1 - 2x)^6}.$$

C2) $y = \sqrt{5x^2 + 1} = (5x^2 + 1)^{1/2}$

$$y' = \frac{1}{2}(5x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 10x = \boxed{\frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 1}}}.$$

C3) $y = e^{3x^2 - x}$

$$y' = e^{3x^2 - x} \cdot (6x - 1) = \boxed{(6x - 1)e^{3x^2 - x}}.$$

C4) $y = \sin(x^3)$

$$y' = \cos(x^3) \cdot 3x^2 = \boxed{3x^2 \cos(x^3)}.$$

C5) $y = \ln(2x + 5)$

$$y' = \frac{1}{2x + 5} \cdot 2 = \boxed{\frac{2}{2x + 5}}.$$

10. Задачи с логаритми (генерирани) — решения

L1) Опростете: $\ln(e^5)$

$$\ln(e^5) = 5.$$

$$\boxed{5}$$

L2) Опростете: $\log_2(32)$

$$2^5 = 32 \Rightarrow \log_2 32 = 5.$$

$$\boxed{5}$$

L3) Опростете: $\log_3(27x^2)$ (за $x > 0$)

$$\log_3(27x^2) = \log_3 27 + \log_3 x^2 = 3 + 2\log_3 x.$$

$$\boxed{3 + 2\log_3 x}$$

L4) Решете: $\ln x = 2$

$$\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2.$$

$$\boxed{x = e^2}$$

L5) Решете: $\log_5(x - 1) = 2$

$$\log_5(x - 1) = 2 \Rightarrow x - 1 = 5^2 = 25 \Rightarrow x = 26.$$

$$\boxed{x = 26}$$

L6) Решете: $\ln(x) + \ln(x - 1) = \ln 6$ (**област:** $x > 1$)

$$\ln(x) + \ln(x - 1) = \ln(x(x - 1)) = \ln 6 \Rightarrow x(x - 1) = 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0.$$

От областта $x > 1$:

$$\boxed{x = 3}.$$

L7) Оппростете: $\log_a \left(\frac{\sqrt{a^3}}{a} \right)$ **за** $a > 0$

$$\sqrt{a^3} = a^{3/2}, \quad \frac{a^{3/2}}{a} = a^{1/2} \Rightarrow \log_a(a^{1/2}) = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\frac{1}{2}}$$

L8) Решете: $\log_2(x) + \log_2(x - 2) = 3$ (**област:** $x > 2$)

$$\log_2(x(x - 2)) = 3 \Rightarrow x(x - 2) = 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0.$$

От областта $x > 2$:

$$\boxed{x = 4}.$$

L9) (По-трудна) Решете: $\log_3(x + 2) - \log_3(x - 1) = 1$ (**област:** $x > 1$)

$$\log_3 \left(\frac{x + 2}{x - 1} \right) = 1 \Rightarrow \frac{x + 2}{x - 1} = 3 \Rightarrow x + 2 = 3x - 3 \Rightarrow 5 = 2x \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{2}}.$$

L10) (По-трудна) Оппростете: $\ln \left(\frac{e^{2x}\sqrt{x}}{x^3} \right)$ **за** $x > 0$

$$\ln \left(\frac{e^{2x}\sqrt{x}}{x^3} \right) = \ln(e^{2x}) + \ln(\sqrt{x}) - \ln(x^3) = 2x + \frac{1}{2} \ln x - 3 \ln x = 2x - \frac{5}{2} \ln x.$$

$$\boxed{2x - \frac{5}{2} \ln x}$$

11. Отговори на теория-куиза (кратко, за сверяване)

1. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$: наклон на секущата през $(x, f(x))$ и $(x+h, f(x+h))$.
2. Нужна е граница, защото наклон „в точка“ идва като граница на наклони между две точки, когато втората се приближи.
3. При локален максимум (гладка крива) очакваме $f'(a) = 0$.
4. $f'(x) > 0 \Rightarrow$ расте; $f'(x) < 0 \Rightarrow$ спада.
5. „Промяната на y по x е промяната на y по u умножена по промяната на u по x “.
6. За $|x|$ в 0 има „ъгъл“: ляв наклон -1 , десен $+1 \Rightarrow$ няма една обща допирателна.

12. Домашно (по избор)

- Измислете 3 свои композиции (напр. $\sin(\cdot)$, $\sqrt{\cdot}$, $e^{(\cdot)}$) и ги диференцирайте.
- Решете още 5 логаритмични уравнения (поне 2 да имат област на дефиниция).