

ДОМАШНО - Chain Rule

Таблица за производни

Функция $f(x)$	Производна $f'(x)$
c	0
x^n (n константа)	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Правила за диференциране

Правило	Формула
Константен множител	$(cf(x))' = cf'(x)$
Сума и разлика	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
Произведение	$(fg)' = f'g + fg'$
Частно	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
Верижно правило	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

I. Намерете производната на $f(x)$

- $f(x) = 4x^5 - 3x^3 + 2x - 7.$
- $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 2}.$
- $f(x) = (3x - 1)^5.$
- $f(x) = \sqrt{5x - 1}.$
- $f(x) = x^2 \sin x.$
- $f(x) = (x^2 + 1) \cos x.$
- $f(x) = \tan(2x) - \cos x.$
- $f(x) = \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x}}.$
- $f(x) = \sin(\cos(\tan(x))).$
- $f(x) = (\tan x)^2.$

II. Намерете производната по x при константа w

(Тук w е константа, т.е. $\frac{dw}{dx} = 0$.)

11. $f(x) = \sin((wx + 1)^3)$.

12. $f(x) = \frac{(wx + 2)^3}{x^2 + 1}$.

13. $f(x) = (x^2 + w^2) \cos(wx)$.

III. Частни производни (по x и по w)

(Тук x и w са независими променливи. Намерете $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial w}$.)

14. $y(x, w) = (wx + 1)^4$.

15. $y(x, w) = \frac{wx}{1 + x^2}$.

Решения (стъпка по стъпка)

1.

$$f(x) = 4x^5 - 3x^3 + 2x - 7$$

По правило за степен и сума:

$$f'(x) = 20x^4 - 9x^2 + 2.$$

2.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 2}$$

Нека $u = x^2 - 4x + 1$, $v = x - 2$. Тогава $u' = 2x - 4$, $v' = 1$.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(2x - 4)(x - 2) - (x^2 - 4x + 1) \cdot 1}{(x - 2)^2}.$$

Съкращаваме числителя:

$$(2x - 4)(x - 2) = 2x^2 - 8x + 8,$$

$$2x^2 - 8x + 8 - (x^2 - 4x + 1) = x^2 - 4x + 7.$$

Значи:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{(x - 2)^2}.$$

3.

$$f(x) = (3x - 1)^5$$

Верижно правило: външна функция t^5 , вътрешна $t = 3x - 1$.

$$f'(x) = 5(3x - 1)^4 \cdot (3) = 15(3x - 1)^4.$$

4.

$$f(x) = \sqrt{5x - 1} = (5x - 1)^{1/2}$$

Верижно правило:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(5x - 1)^{-1/2} \cdot 5 = \frac{5}{2\sqrt{5x - 1}}.$$

5.

$$f(x) = x^2 \sin x$$

Произведение:

$$f'(x) = (x^2)' \sin x + x^2(\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

6.

$$f(x) = (x^2 + 1) \cos x$$

Произведение:

$$f'(x) = (x^2 + 1)' \cos x + (x^2 + 1)(\cos x)' = 2x \cos x + (x^2 + 1)(-\sin x).$$

$$f'(x) = 2x \cos x - (x^2 + 1) \sin x.$$

7.

$$f(x) = \tan(2x) - \cos x$$

Сума/разлика. За $\tan(2x)$: верижно правило.

$$(\tan(2x))' = \frac{1}{\cos^2(2x)} \cdot (2x)' = \frac{1}{\cos^2(2x)} \cdot 2 = \frac{2}{\cos^2(2x)}.$$

$$(-\cos x)' = +\sin x.$$

Значи:

$$f'(x) = \frac{2}{\cos^2(2x)} + \sin x.$$

8.

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x}}$$

Преписваме с степени:

$$f(x) = (x^3 + 1)x^{-1/2} = x^{3-1/2} + x^{-1/2} = x^{5/2} + x^{-1/2}.$$

По правило за степен:

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{-3/2}.$$

Може и като една дроб:

$$f'(x) = \frac{5x^3 - 1}{2x^{3/2}}.$$

9.

$$f(x) = \sin(\cos(\tan x))$$

Нека $a = \cos(\tan x)$, $b = \tan x$. Тогава $f(x) = \sin(a)$.

$$f'(x) = \cos(a) \cdot a'.$$

Сега $a = \cos(b)$, значи

$$a' = -\sin(b) \cdot b'.$$

А $b = \tan x$, така че

$$b' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Комбинираме:

$$f'(x) = \cos(\cos(\tan x)) \cdot \left(-\sin(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right).$$

$$f'(x) = -\frac{\cos(\cos(\tan x)) \sin(\tan x)}{\cos^2 x}.$$

10.

$$f(x) = (\tan x)^2$$

Верижно правило: външна функция t^2 , вътрешна $t = \tan x$.

$$f'(x) = 2 \tan x \cdot (\tan x)' = 2 \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$f'(x) = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x}.$$

11.

$$f(x) = \sin((wx + 1)^3), \quad w = \text{константа}$$

Верижно правило. Нека $u = (wx + 1)^3$.

$$f'(x) = \cos(u) \cdot u'.$$

А $u = (wx + 1)^3$, пак верижно правило:

$$u' = 3(wx + 1)^2 \cdot (wx + 1)'.$$

Понеже w е константа:

$$(wx + 1)' = w.$$

Следователно:

$$f'(x) = \cos((wx + 1)^3) \cdot 3(wx + 1)^2 \cdot w = 3w(wx + 1)^2 \cos((wx + 1)^3).$$

12.

$$f(x) = \frac{(wx + 2)^3}{x^2 + 1}, \quad w = \text{константа}$$

Нека $u = (wx + 2)^3$, $v = x^2 + 1$. Тогава

$$u' = 3(wx + 2)^2 \cdot (wx + 2)' = 3(wx + 2)^2 \cdot w, \quad v' = 2x.$$

По правило за частно:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{3w(wx + 2)^2(x^2 + 1) - (wx + 2)^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

(По желание може да се изнесе $(wx + 2)^2$ пред скоба.)

13.

$$f(x) = (x^2 + w^2) \cos(wx), \quad w = \text{константа}$$

Произведение. Нека $p = x^2 + w^2$, $q = \cos(wx)$.

$$p' = 2x, \quad q' = -\sin(wx) \cdot (wx)' = -\sin(wx) \cdot w.$$

Тогава:

$$f'(x) = p'q + pq' = 2x \cos(wx) + (x^2 + w^2)(-\sin(wx)).$$

$$f'(x) = 2x \cos(wx) - w(x^2 + w^2) \sin(wx).$$

14.

$$y(x, w) = (wx + 1)^4$$

Частна производна по x : третираме w като константа. Нека $u = wx + 1$.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4u^3 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 4(wx + 1)^3 \cdot w.$$

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial x} = 4w(wx + 1)^3}$$

Частна производна по w : третираме x като константа.

$$\frac{\partial y}{\partial w} = 4(wx + 1)^3 \cdot \frac{\partial (wx + 1)}{\partial w} = 4(wx + 1)^3 \cdot x.$$

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial w} = 4x(wx + 1)^3}$$

15.

$$y(x, w) = \frac{wx}{1 + x^2}$$

Частна производна по w : x е константа, а знаменателят не зависи от w .

$$\frac{\partial y}{\partial w} = \frac{x}{1 + x^2}.$$

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial w} = \frac{x}{1 + x^2}}$$

Частна производна по x : w е константа, използваме правило за частно. Нека $u = wx$, $v = 1 + x^2$. Тогава $u' = w$, $v' = 2x$.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{w(1 + x^2) - (wx) \cdot 2x}{(1 + x^2)^2}.$$

Съкращаваме числителя:

$$w(1 + x^2) - 2wx^2 = w(1 - x^2).$$

Значи:

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{w(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}}$$